# بكالوريا :دورة جوان2011

## الموضوع الأول

### التمرين الأول :

$(u_n)$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

$(v_n)$ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية اقترحت ثلاث إجابات ، إجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل.

**1** . المتتالية $(v_n)$ :

أ – حسابية. ب – هندسية. جـ – لا حسابية و لا هندسية.

**2** . نهاية المتتالية $(u_n)$ هي :

أ – $+\infty$ . ب – $-\frac{1}{2}$. جـ – $-\infty$.

**3** . نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + ... + e^{n\ln 3}\right]$.

أ – $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ . ب – $S_n = \frac{1 - 3^n}{4}$. جـ – $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$.

### التمرين الثاني :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ المستوي $(p)$ الذي يشمل النقطة $A\left(1;-2;1\right)$ و $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظمي له، وليكن $(Q)$ المستوي ذا المعادلة $x + 2y - 7 = 0$.

**1** . اكتب معادلة ديكارتية للمستوي $(p)$.

**2** . أ – تحقق أن النقطة $B\left(-1;4;-1\right)$ مشتركة بين المستويين $(p)$ و $(Q)$.

ب – بين أن المستويين $(p)$ و $(Q)$ متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

**3** . لتكن النقطة $C\left(5;-2;-1\right)$

أ – احسب المسافة بين النقطة $C$ و المستوي $(p)$ ثم المسافة بين النقطة $C$ و المستوي $(Q)$.

ب – أثبت أن المستويين $(p)$ و $(Q)$ متعامدان.

جـ – استنتج المسافة بين النقطة $C$ و المستقيم $(\Delta)$.

## التمرين الثالث :

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،النقط $A$ ، $B$ و $C$ التي لاحقاتها على الترتيب: $z_A=-i$ ، $z_B=2+3i$ و $z_C=-4+i$.

**1** . أ ـ أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ .

ب – عين طويلة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ و عمدة له ، ثم استنتج طبيعة المثلث $ABC$ .

**2** . نعتبر التحويل النقطي $T$ في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ ، النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث: $z'=iz-1-i$ .

أ ـ عين طبيعة التحويل $T$ محددا عناصره المميزة .

ب ـ ماهي صورة النقطة $B$ بالتحويل $T$ ؟

**3** . لتكن النقطة $D$ ذات اللاحقة $z_D=-6+2i$ .

أ – بين أن النقط $A$ ، $C$ و $D$ في استقامية.

ب ـ عين نسبة التحاكي $h$ الذي مركزه $A$ و يحول النقطة $C$ إلى النقطة $D$ .

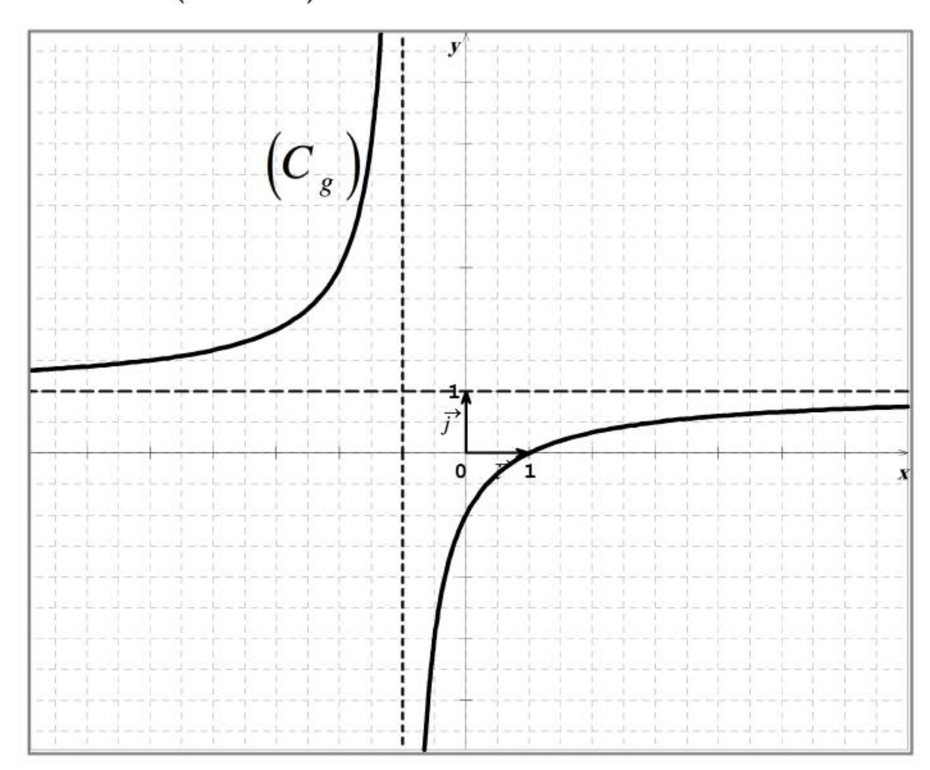
جـ ـ عين العناصر المميزة للتشابه المباشر $S$ الذي مركزه $A$ و يحول $B$ إلى $D$ .

## التمرين الرابع :

**I** ) نعتبر $g$ الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و $(C_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الشكل المقابل ،



بقراءة بيانية:



أ ـ شكل جدول تغيرات الدالة $g$ .

ب – حل بيانيا المتراجحة $g(x) > 0$ .

جـ ـ عين بيانيا قيم $x$ التي من أجلها يكون $0 < g(x) < 1$

**II**) لتكن $f$ الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .

**1** . احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا.

**2** . أ – بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$ .

ب ـ احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

**3** . أ – باستعمال الجزء **I** ) السؤال جـ ـ عين إشارة العبارة $ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$ .

ب ـ $\alpha$ عدد حقيقي .

بين أن الدالة $x \mapsto (x-\alpha)ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto ln(x-\alpha)$ على المجال $]1;+\infty[$ .

جـ ـ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ، $g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ثم عين دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ .

# الموضوع الثاني

## التمرين الأول :

$\alpha$ عدد حقيقي موجب تماما و يختلف عن $1$ .

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي $n$ :

$u_{n+1} = \alpha u_n + 1$ .

$(v_n)$ متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي $n$ بـ : $v_n = u_n + \frac{1}{\alpha - 1}$.

**1** . أ – بين أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\alpha$.

ب ـ أكتب بدلالة $n$ و $\alpha$ ، عبارة $v_n$ ثم استنتج بدلالة $n$ و $\alpha$ ، عبارة $u_n$ .

جـ ـ عين قيم العدد الحقيقي $\alpha$ التي تكون من أجلها المتتالية $(u_n)$ متقاربة.

2 . نضع $\alpha = \frac{3}{2}$ .

ـ احسب بدلالة $n$ ، المجموعين $S_n$ و $T_n$ حيث:

$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ و $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$ .

## التمرين الثاني :

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

النقط $A$ ، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب: $z_A = 3 - 2i$ ، $z_B = 3 + 2i$ ، $z_C = 4i$ .

**1** . أ – علم النقط $A$ ، $B$ و $C$.

ب ـ ما طبيعة الرباعي $OABC$ ؟ علل إجابتك .

جـ ـ عين لاحقة النقطة $\Omega$ مركز الرباعي $OABC$ .

**2** . عين ثم أنشئ $(E)$ مجموعة النقط $M$ من المستوي التي تحقق:

$$\left\| \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \right\| = 12$$

**3** . أ ـ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول $z$ التالية :

$z^2 - 6z + 13 = 0$ . نسمي $z_0$ و $z_1$ حلي هذه المعادلة .

ب ـ لتكن $M$ نقطة من المستوي التي تحقق : $|z - z_0| = |z - z_1|$

## التمرين الثالث :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقط :

$A(0;1;5)$ ، $B(2;1;7)$ ، $C(3;-3;6)$ .

1 . أ – اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم $(\Delta)$ الذي يشمل النقطة $B$ و $\vec{u}\,(1;-4;-1)$ شعاع توجيه له.

ب – تحقق أن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$.

جـ- بين أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د – استنتج المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$.

2 . نعتبر النقطة $M\ (2+t;1-4t;7-t)$ حيث $t$ عدد حقيقي ، ولتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$ .

أ – اكتب عبارة $h(t)$ بدلالة $t$ .

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $t$ ، $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$ .

جـ- استنتج قيمة العدد الحقيقي $t$ التي تكون من أجلها المسافة $AM$ أصغر ما يمكن.

ـ قارن بين القيمة الصغرى للدالة $h$ ، و المسافة بين النقطة $A$ و المستقيم $(\Delta)$.

## التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$ .

$(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ .



1 . أ ـ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .

ب ـ احسب $f'(x)$ ثم ادرس إشارتها.

جـ ـ شكل جدول تغيرات الدالة $f$ .

2 . أ – بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=-ex-1$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $(-\infty)$ .

بـ اكتب معادلة للمستقيم $(T)$ مماس المنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$ .

جـ ـ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا $\alpha$ .

د – ارسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ثم المنحنى $(C_f)$ في المجال $]-\infty;2]$ .

3 . أ ـ احسب بدلالة $\alpha$ ، المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$ .

بـ أثبت أن: $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ ( $ua$ هي وحدة المساحات )

# حل بكالوريا :دورة جوان 2011

## حل الموضوع الأول

### التمرين الأول :

**1** . المتتالية بـ $(v_n)$ هندسية و أساسها $3$ لأن من أجل كل عدد طبيعي $n$ ،

لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{2}$ ومنه: $v_{n+1} = 3u_n + 1 + \frac{1}{2}$ ، ومنه $v_{n+1} = 3\left(u_n + \frac{1}{2}\right)$ ،

أي: $v_{n+1} = 3v_n$.

**2** . نهاية المتتالية $(u_n)$ هي : أ- $+\infty$ لأن:

لدينا $v_n = v_0 \times 3^n$ وبما أن $3 > 1$ و $v_0 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0$ فإن $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ ،

ولكون: $u_n = v_n - \frac{1}{2}$ نستنتج أن: $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ .

**3** . جـ- $S_n = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$ لأن:

$$S_n = -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{2\ln 3} + e^{3\ln 3} + \dots + e^{n\ln 3}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 + e^{\ln 3} + e^{\ln 3^2} + e^{\ln 3^3} + \dots + e^{\ln 3^n}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n\right]$$

حيث المجموع $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n$ هو مجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية أساسها $3$

وحدها الأول $1$ ومنه: $S_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3}\right) = \frac{1 - 3^{n+1}}{4}$

### التمرين الثاني :

**1** . المستوي $(p)$ هو مجموعة النقط $M\ (x;y;z)$ بحيث : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ .

لدينا: $\vec{n}(-2;1;5)$ و $\overrightarrow{AM}\ (x-1; y+2; z-1)$ ومنه بعد الحساب و التبسيط نجد:

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ تكافئ $(p): -2x + y + 5z - 1 = 0$

2 . أ- بتعويض إحداثيات $B$ في معادلة $(p)$ نجد $-2(-1) + 4 + 5(-1) - 1 = 0$ محققة

ومنه $B \in (p)$ ، و بتعويض إحداثيات $B$ في معادلة $(Q)$ نجد $-1 + 2(4) - 7 = 0$ محققة

ومنه $B\in(Q)$، إذن $B$ مشتركة بين $(p)$ و $(Q)$.

ب – لدينا $\vec{n}(-2;1;5)$ شعاع ناظم للمستوي $(p)$ و $\vec{n'}(1;2;0)$ شعاع ناظم للمستوي $(Q)$ غير مرتبطين خطيا لأن: $\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-2}$ ومنه $(p)$ و $(Q)$ متقاطعان وفق مستقيم $(\Delta)$ تمثيل ديكارتي له: $\begin{cases}-2x+y+5z-1=0\\ x+2y-7=0\end{cases}$

وبوضع مثلا $z=t$ نستنتج من الجملة الأخيرة الجملة $\begin{cases}x=2t+1\\ y=-t+3\\ z=t\end{cases}$ وهي تمثيل وسيطي للمستقيم $(\Delta)$، حيث $t$ وسيط حقيقي.

**3** . لتكن النقطة $C(5;-2;-1)$

أ – لدينا: $d_1=d\left(C;(P)\right)=\frac{\left|(-2)5+(-2)+5(-1)-1\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+5^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}$

ولدينا: $d_2=d\left(C;(Q)\right)=\frac{\left|5+2(-2)-7\right|}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$



ب– لدينا بالحساب: $\vec{n}.\vec{n'}=0$ ومنه المستويان $(p)$ و $(Q)$ متعامدين.

جـ –لدينا: $d\left(C;(\Delta)\right)=\sqrt{d_1^2+d_2^2}$ ومنه: $d\left(C;(\Delta)\right)=\sqrt{\left(\frac{18}{\sqrt{30}}\right)^2+\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2}$

أي: $d\left(C;(\Delta)\right)=\sqrt{18}$.

## التمرين الثالث :

**1** . أ –لدينا: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{(-4+2i)(2-4i)}{(2+4i)(2-4i)}=\frac{20i}{20}=i$ ، إذن: $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=i$

ب –لدينا: $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|i|=1$ و ، $arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=arg(i)=\frac{\pi}{2}$.

وبما أن: $\frac{AC}{AB}=1$ و $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$ فإن المثلث $ABC$ قائم و متساوي الساقين في $A$ .

**2** . النقطة $M'$ ذات اللاحقة $z'$ حيث: $z'=iz-1-i$ .

أ – العبارة المركبة للتحويل $T$ هي من الشكل $z'=az+b$ ، حيث $a=i$ و $b=-1-i$

بما أن $a$ مركب غير حقيقي و $|a|=1$ فإن $T$ دوران زاويته $arg(a)=\frac{\pi}{2}$ ، ومركزه النقطة ذات اللاحقة $\frac{b}{1-a}=\frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-i=z_A$ ، ومنه النقطة $A$ هي مركز الدوران $T$.

ب – بما أن: $AC=AB$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{2}$ فإن صورة النقطة $B$ بالتحويل $T$ هي النقطة $C$.

**3**. أ – لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{-4+2i}{-6+3i}=\frac{2}{3}$ .

بما أن $\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}$ حقيقي فإن النقط $A$ ، $C$ و $D$ في استقامية.

ب – لتكن $k$ نسبة التحاكي $h$ ، لدينا: $z_D-z_A=k(z_C-z_A)$ ومنه:

$k=\frac{z_C-z_A}{z_D-z_A}=\frac{3}{2}$ ، إذن: $k=\frac{3}{2}$

جـ- لدينا : $T(B)=C$ و $h(C)=D$ ومنه: $(hoT)(B)=D$ ، أي: $S(B)=D$

وبالتالي نسبة التشابه $S$ هي نسبة التحاكي $h$ أي $\frac{3}{2}$ ، وزاويته هي زاوية الدوران $T$ أي $\frac{\pi}{2}$ .

## التمرين الرابع :

**I**) أ- جدول تغيرات الدالة $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | ‖ | + |
| $g(x)$ | $1 \nearrow +\infty$ | ‖ | $-\infty \nearrow 1$ |

ب – $g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ .

جـ- $0<g(x)<1$ تكافئ $x\in]1;+\infty[$ .

**II**) لتكن $f$ الدالة المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}+ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

**1**. بما أن $\lim_{x\overset{>}{\to}1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{0^+}{2}=0^+$ و $\lim_{X\overset{>}{\to}0} ln X=-\infty$ فإن: $\lim_{x\overset{>}{\to}1} ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\infty$

ومنه: $\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)=-\infty$ .

بما أن $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim_{X\to1}\ln X=\ln 1=0$ فإن:

$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ ومنه: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$ .

نستنتج أن المنحنى $(C_f)$ يقبل المستقيم الذي معادلته $x=1$ كمستقيم مقارب بجوار $-\infty$

ويقبل المستقيم الذي معادلته $y=1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$ .

**2**. أ –من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ :

$g'(x)=\frac{1-(-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$ .

ب – الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ و لدينا:

$$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} .$$

بما أن: $\frac{2}{(x+1)^2}>0$ و $\frac{x-1}{x+1}>0$ على المجال $]1;+\infty[$ فإن: $f'(x)>0$

وبالتالي الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة $f$:

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ $1$ |

ب– $g(x)>0$ تكافئ $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

**3**. أ –جدول إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$ :

| $x$ | $1$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ | $-$ |

ب- الدالة $x \mapsto (x-\alpha)ln(x-\alpha)-x$ تقبل الاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ كونها عبارة عن مجموع و مركب و جداء دوال قابلة للاشتقاق على المجال $]1;+\infty[$ ، كما أن مشتقتها هي الدالة : $x \mapsto 1\times ln(x-\alpha)+(x-\alpha)\times\frac{1}{(x-\alpha)}-1$

أي الدالة: $x \mapsto ln(x-\alpha)$

ومنه الدالة $x \mapsto (x-\alpha)ln(x-\alpha)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto ln(x-\alpha)$ على المجال $]1;+\infty[$ .

جـ- من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ :

$$g(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{x+1-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}.$$

من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ :

$$f(x)=1-\frac{2}{x+1}+ln(x-1)-ln(x+1)$$

وبالتالي الدالة $F$ حيث:

$$F(x)=x-2ln(x-1)+\left[(x-1)ln(x-1)-x\right]-\left[(x+1)ln(x+1)-x\right]$$

أي: $F(x)=x+\left[(x-1)ln(x-1)\right]-\left[(x+3)ln(x+1)-x\right]$

هي دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$ .

# حل الموضوع الثاني

## التمرين الأول :

**1** . أ – من أجل كل عدد طبيعي $n$ لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{\alpha - 1}$ ، ومنه:

$v_{n+1} = \alpha u_n + 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ ، ومنه: $v_{n+1} = \alpha u_n + \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ ، ومنه:

$v_{n+1} = \alpha\left(u_n + \frac{1}{\alpha - 1}\right)$ ، أي : $v_{n+1} = \alpha v_n$ . وهذا معناه أن $(v_n)$ متتالية هندسية أساسها $\alpha$.

ب – $v_n = v_0 \times \alpha^n$ حيث $v_0 = u_0 + \frac{1}{\alpha - 1} = 6 + \frac{1}{\alpha - 1}$ أي: $v_0 = \frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}$ .

ومنه: $v_n = \left(\frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}\right)\alpha^n$ .

ولدينا: $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1}$ ، ومنه: $u_n = \left(\frac{6\alpha - 5}{\alpha - 1}\right)\alpha^n - \frac{1}{\alpha - 1}$.

جـ- تكون المتتالية $(u_n)$ متقاربة من أجل $-1 < \alpha < 1$ .

2 . من أجل $\alpha = \frac{3}{2}$ لدينا $u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 1$ و $v_n = u_n + \frac{1}{\frac{3}{2} - 1}$.

لدينا: $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times \frac{\alpha^{n+1} - 1}{\alpha - 1}$ ، من أجل $\alpha = \frac{3}{2}$ لدينا $v_0 = \frac{6 \times \frac{3}{2} - 5}{\frac{3}{2} - 1}$

أي: $v_0 = 8$ ، ومنه: $S_n = 8 \times \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{2} - 1}$ ، أي : $S_n = 16 \times \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1\right]$

لدينا: $u_n = v_n - \frac{1}{\alpha - 1} = v_n - \frac{1}{\frac{3}{2} - 1}$ ، أي: $u_n = v_n - 2$

ومنه: $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = (v_0 - 2) + (v_1 - 2) + (v_2 - 2) + ... + (v_n - 2)$ .

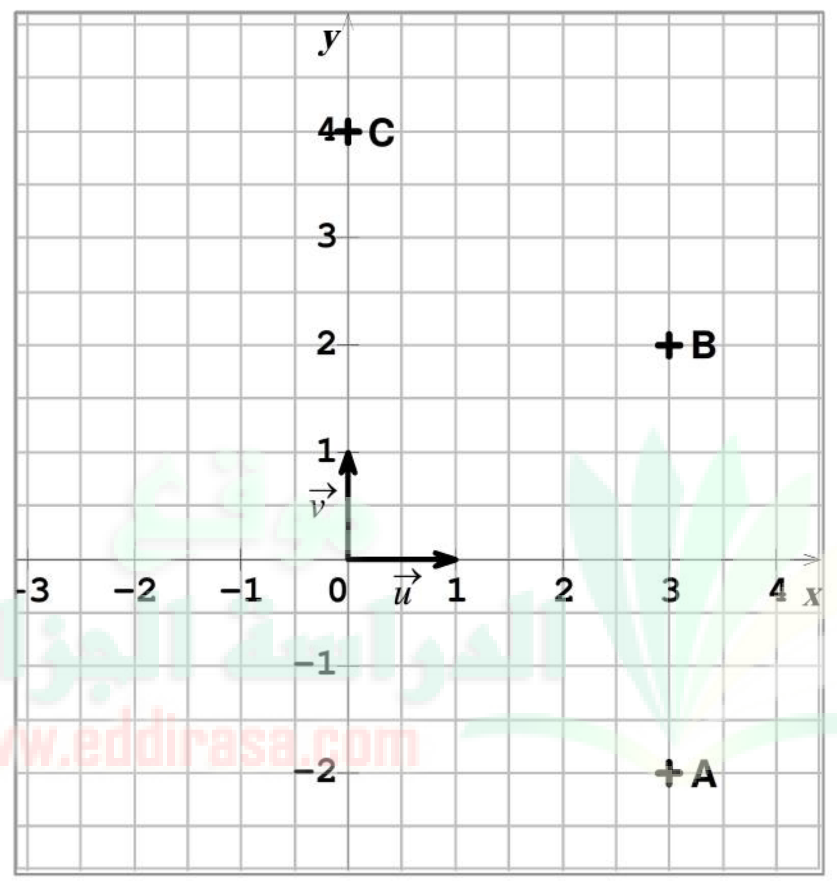
أي: $T_n=(v_0+v_1+v_2+...+v_n)+(-2)+(-2)+(-2)+(-2)+...+(-2)$

ومنه: $T_n=S_n-2(n+1)$ ، وبالتالي: $T_n=16\times\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]-2(n+1)$

**التمرين الثاني :**

النقط $A$، $B$ و $C$ لواحقها على الترتيب: $z_A=3-2i$ ، $z_B=3+2i$ ، $z_C=4i$.

**1**. أ– تعليم النقط $A\,(3;-2)$، $B\,(3;2)$ و $C\,(0;4)$:




ب– لدينا: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A=4i$ ، و $z_{\overrightarrow{OC}}=z_C-z_O=4i$ ، ومنه: $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{OC}}$

أي: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ وبالتالي الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .

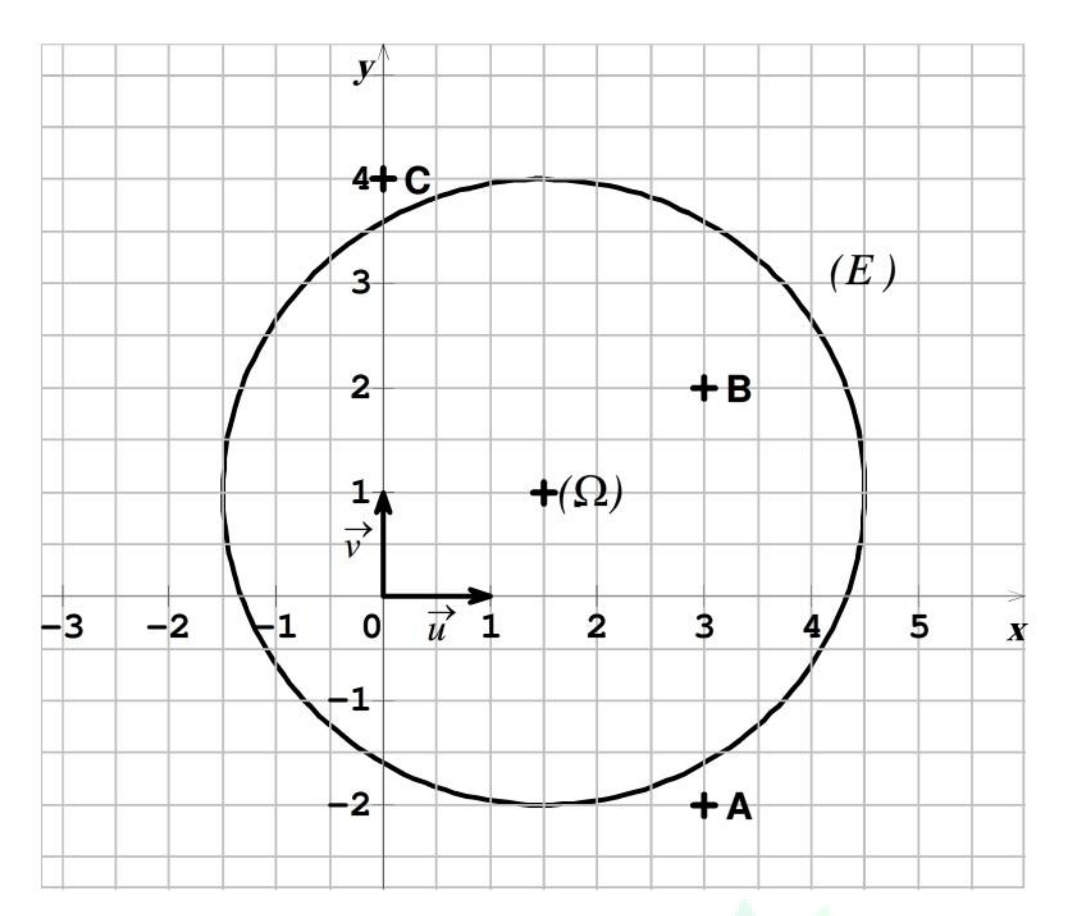
جـ- النقطة $\Omega$ مركز الرباعي $OABC$ هي مرجح الجملة:

$\{(O,1);(A,1);(B,1);(C,1)\}$ ، ومنه: $z_\Omega=\frac{z_O+z_A+z_B+z_C}{4}$ ،

بالحساب نجد $z_\Omega=\frac{3}{2}+i$.

**2**. $\left\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=12$ تكافئ $\left\|4\overrightarrow{M\Omega}\right\|=12$ ، ومنه: $4M\Omega=12$

أي: $M\Omega=3$ . وبالتالي $(E)$ هي الدائرة ذات المركز $\Omega$ و نصف القطر $3$




**3**. أ – مميز المعادلة $z^2-6z+13=0$ هو $\Delta=-16=(4i)^2$.

ومنه $z_0=\frac{6-4i}{2}=3-2i=z_A$ و $z_1=\overline{z_0}=3+2i=z_B$.

ب- $|z-z_0|=|z-z_1|$ تكافئ $|z-z_A|=|z-z_B|$ أي $AM=BM$ ومنه مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$ ولكون $A$ و $B$ متناظرتين بالنسبة إلى محور الفواصل فإن مجموعة النقط هي حامل محور الفواصل.

<u>**التمرين الثالث :**</u>

**1**. أ – المستقيم $(\Delta)$ هو مجموعة النقط $M(x;y;z)$ بحيث: $\begin{cases} x=2+1\times t \\ y=1+(-4)\times t \\ z=7+(-1)\times t \end{cases}$ ، أي:

$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-4t \\ z=7-t \end{cases}$ .حيث $t$ وسيط حقيقي.

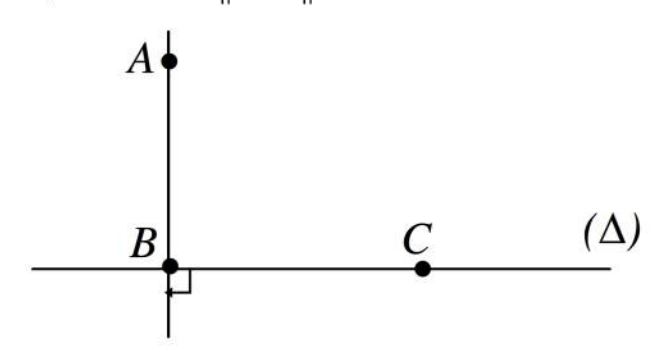
ب – بتعويض احداثيات النقطة $C$ في التمثيل الوسيطي لـ $(\Delta)$ نجد: $\begin{cases} 3=2+t \\ -3=1-4t \\ 6=7-t \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} t=1 \\ t=1 \\ t=1 \end{cases}$. بما أن $t$ وحيد فإن النقطة $C$ تنتمي إلى المستقيم $(\Delta)$.

جـ- لدينا: $\overrightarrow{AB}\,(2;0;2)$ و $\overrightarrow{BC}\,(1;-4;-1)$ .

بما أن: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=2\times1+0\times(-4)+2\times(-1)=0$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان.

د – $d\left(A;(\Delta)\right)=AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{2^2+0^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.




**2**. نعتبر النقطة $M\,(2+t;1-4t;7-t)$ حيث $t$ عدد حقيقي، ولتكن الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(t)=AM$ .

أ –لدينا: $h(t)=\sqrt{(2+t)^2+(-4t)^2+(2-t)^2}$ . ومنه: $h(t)=\sqrt{18t^2+8}$

ب- من أجل كل عدد حقيقي $t$ لدينا: $h'(t)=\dfrac{18\times\not{2}t}{\not{2}\sqrt{18t^2+8}}$.

ومنه: $h'(t)=\dfrac{18t}{\sqrt{18t^2+8}}$

جـ- إشارة $h'(t)$ هي من نفس إشارة $18t$ ومنه جدول إشارة $h'(t)$:

| $t$ | $-\infty$            $0$            $+\infty$ |
|---|---|
| $h'(t)$ | $-$      $0$      $+$ |

تكون المسافة $AM$ أصغر ما يمكن من أجل $t=0$ .

من أجل $t=0$ يكون $h(0)=\sqrt{18\times0^2+8}$ . أي: $h(0)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ .

نلاحظ أن: $d\left(A;(\Delta)\right)=h(0)$

## التمرين الرابع :

**1**. أ –لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(-ex-1)=+\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ .

ولدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-e-\dfrac{1}{x}\right)$، ولكون: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$ نستنتج أن: $\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x}\right)=+\infty$ .

ومنه: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ .

ب- الدالة $f$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $f'(x)=e^x-e$ .

إشارة $f'(x)$ :

. $f'(x)=0$ تكافئ $e^x=e$ أي $x=1$ .

. $f'(x)<0$ تكافئ $e^x<e$ أي $x<1$ .

. $f'(x)>0$ تكافئ $e^x>e$ أي $x>1$ .

وبالتالي الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ .

جـ- جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

حيث: $f(1)=e^1-e-1=-1$

**2** . أ- بما أن: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-ex-1)]=\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ فإن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-ex-1$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ بجوار $(-\infty)$ .

ب- معادلة المستقيم $(T)$ من الشكل: $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ ،

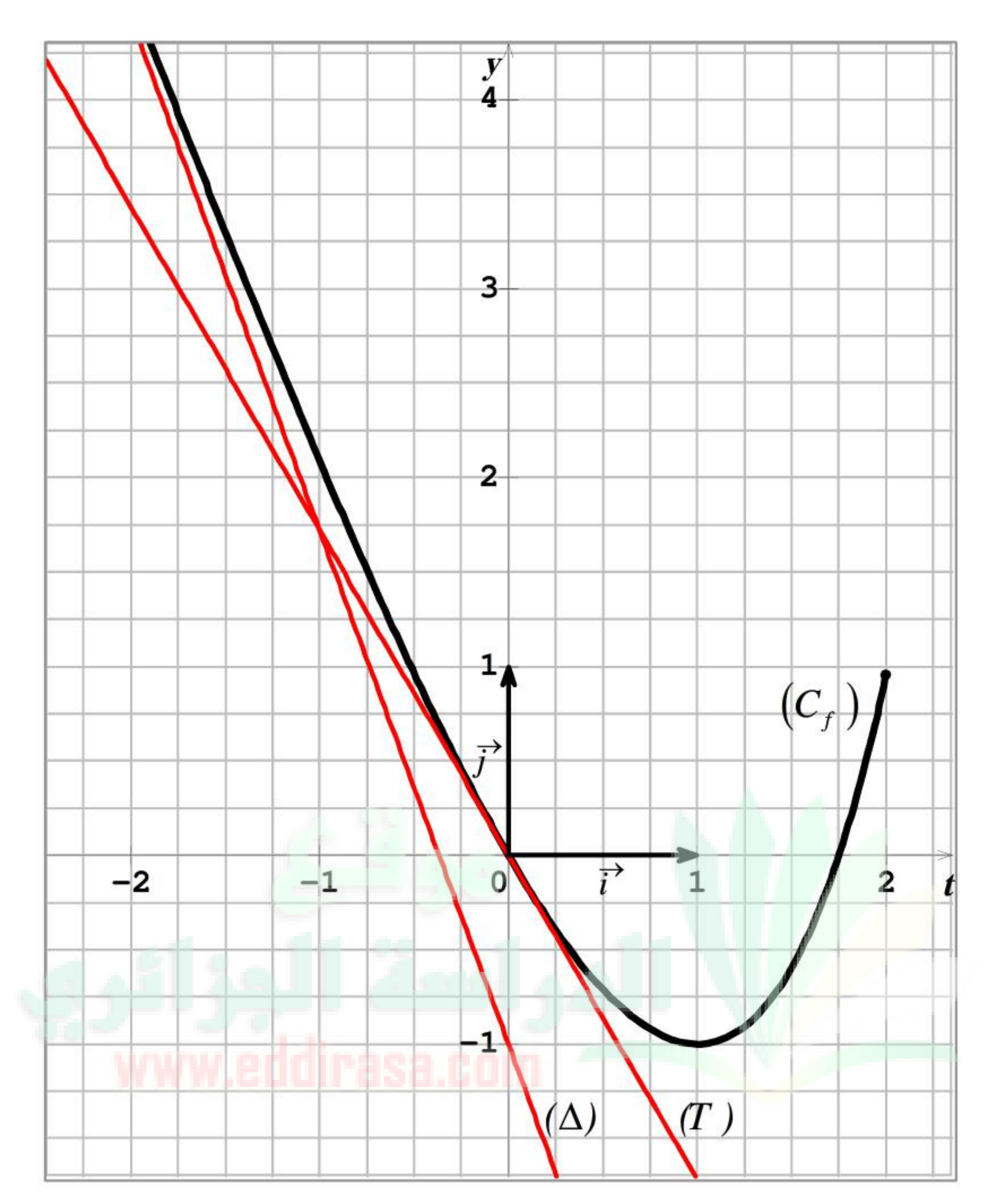
حيث: $f(0)=e^0-e\times0-1=0$ و $f'(0)=e^0-e=1-e$ ومنه: $(T):y=(1-e)x$ .

جـ- المجال $]1,75;1,76[$ محتوى في المجال $[1;+\infty[$ وبالتالي الدالة $f$ مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1,75;1,76[$ ولكون $f(1,75)\approx-0,002<0$ و $f(1,76)\approx0,02>0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا $\alpha$ ، أي يحقق $f(\alpha)=0$ .

د- رسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ثم المنحنى $(C_f)$ في المجال $]-\infty;2]$ :

$f(2)\approx0,95$




3. أ ـ على المجال $[0;\alpha]$ الدالة $f$ سالبة ومنه: $A(\alpha)=-\int_0^\alpha f(x)dx$ ، ومنه:

$A(\alpha)=-\left[e^x-\frac{e}{2}x^2-x\right]_0^\alpha$ ، بالحساب نجد: $A(\alpha)=\left(1-e^\alpha+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha\right)(ua)$ .

بـ لدينا: $f(\alpha)=0$ أي $e^\alpha-e\alpha-1=0$ ومنه: $e^\alpha=e\alpha+1$ ، بالتعويض في $A(\alpha)$

نجد: $A(\alpha)=\left(1-e\alpha-1+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha\right)(ua)$ و ، أي: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$